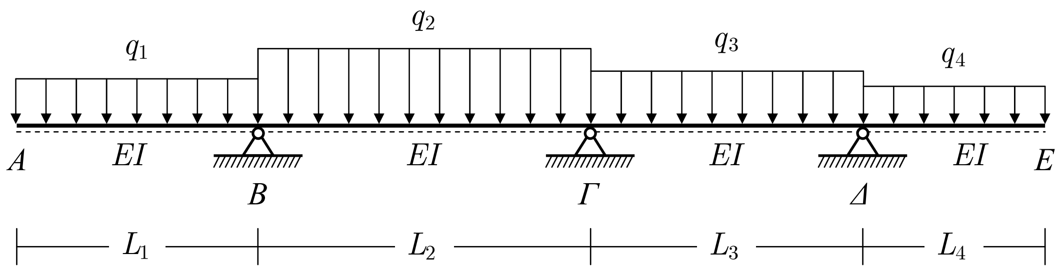
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

Μάθημα: **Στατική ΙΙ** 30 Μαρτίου 2011
Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΔΟΚΟΥ ΔΥΟ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ

Μέθοδος των Παραμορφώσεων

Να επιλυθεί η παρακάτω συνεχής δοκός δύο ανοιγμάτων και να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] αυτής. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής στα ανοίγματα *ΒΓ* και *ΓΔ*.



Ο υπερστατικός φορέας του ανωτέρω σχήματος επιλύεται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων. Η επίλυση περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

(α) προσδιορισμό των καμπτικών ροπών στα σημεία *Β*, *Γ* και *Δ*,

(β) υπολογισμό των αντιδράσεων στις στηρίξεις *Β*, *Γ* και *Δ*,

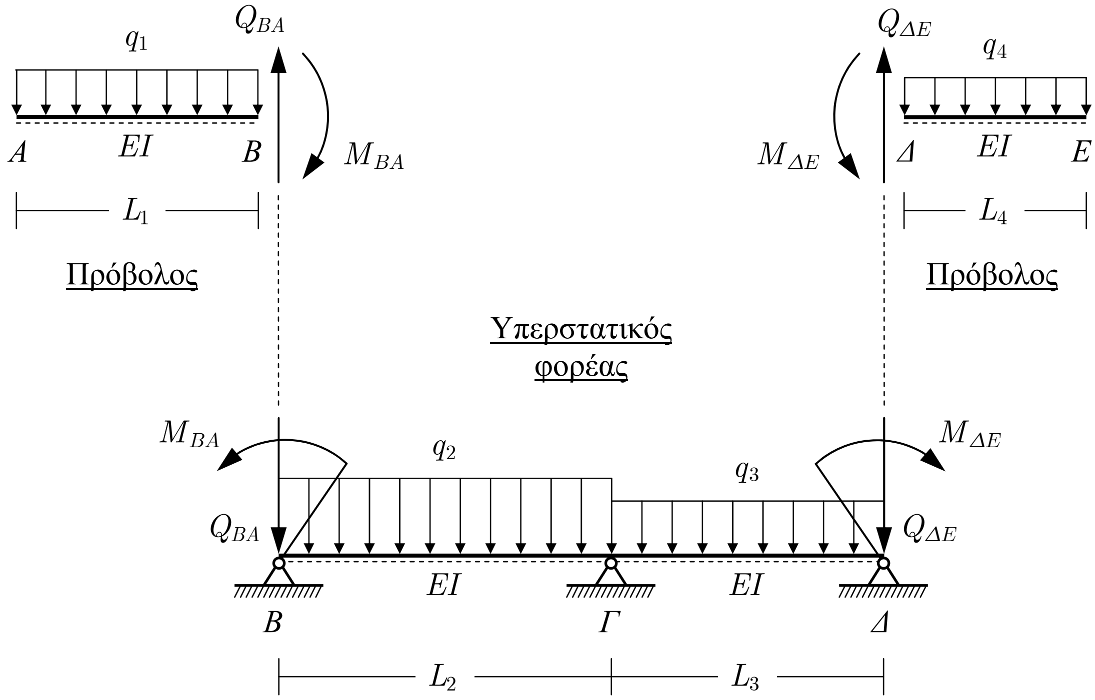
(γ) σχεδιασμό των διαγραμμάτων των τεμνουσών δυνάμεων και των καμπτικών ροπών του φορέα, και

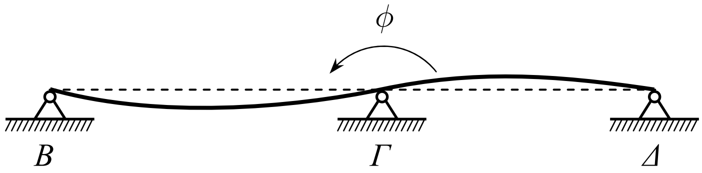
(δ) προσδιορισμό της μέγιστης καμπτικής ροπής, καθώς και της θέσης αυτής.

Οι δύο ακραίοι πρόβολοι *ΑΒ* και *ΔΕ* μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα από την υπόλοιπη δοκό, αφού είναι ισοστατικά τμήματα του αρχικού φορέα. Οι δράσεις πακτώσεως στα άκρα τους *Β* και *Δ* θα ασκηθούν με αντίθετη φορά (δράση - αντίδραση) στα αντίστοιχα άκρα του ενδιάμεσου υπερστατικού τμήματος *ΒΓΔ* του φορέα. Τα εντατικά μεγέθη στα άκρα των προβόλων είναι:

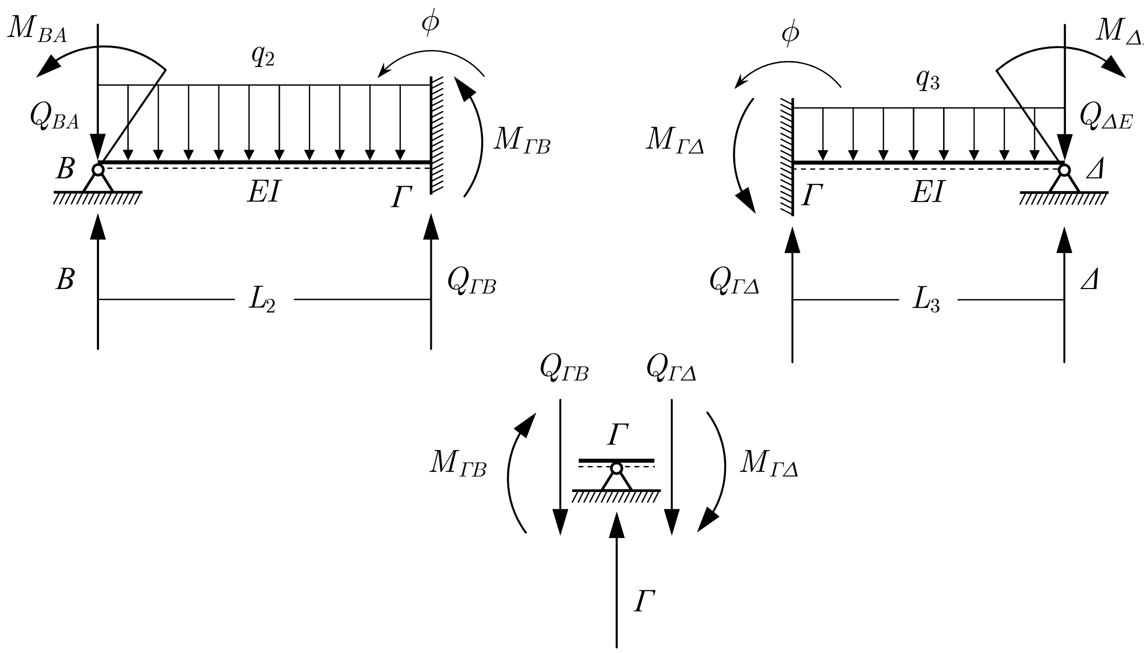
$$M_{BA} = \frac{q_1 \cdot L_1^2}{2} \quad \text{και} \quad Q_{BA} = q_1 \cdot L_1 \tag{1}$$

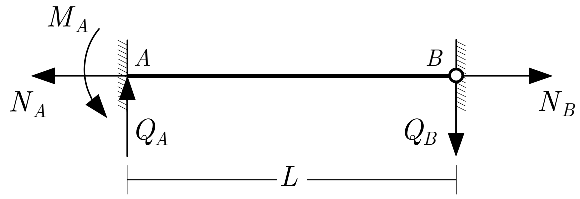
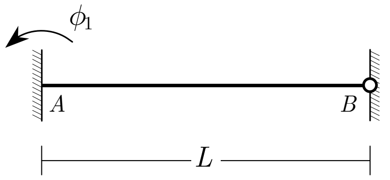
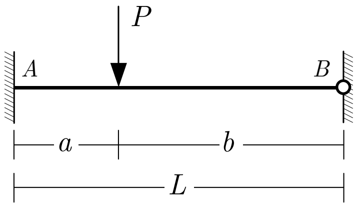
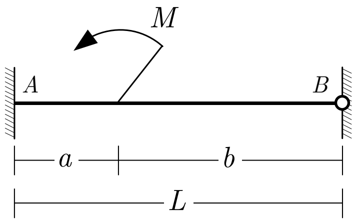
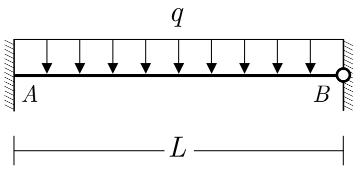
$$M_{\Delta E} = \frac{q_4 \cdot L_4^2}{2} \quad \text{και} \quad Q_{\Delta E} = q_4 \cdot L_4 \tag{2}$$





Παραμόρφωση του φορέα
(ελαστική γραμμή)



ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΣΕ ΜΟΝΟΠΑΚΤΑ ΜΕΛΗ	
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1, \quad Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{Pab}{2L}\left(1+\frac{b}{L}\right)$ $Q_A = \frac{Pb}{2L}\left(3-\frac{b^2}{L^2}\right), \quad Q_B = -\frac{Pa^2}{2L^2}\left(3-\frac{a}{L}\right)$
	$M_A = \frac{M}{2}\left(1-\frac{3b^2}{L^2}\right)$ $Q_A = \frac{3M}{2L}\left(1-\frac{b^2}{L^2}\right), \quad Q_B = \frac{3M}{2L}\left(1-\frac{b^2}{L^2}\right)$
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $Q_A = \frac{5qL}{8}, \quad Q_B = -\frac{3qL}{8}$

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι η στροφή ϕ στο *Γ* (αριστερόστροφη).

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες ακραίων δράσεων μονοπάκτων στοιχείων οι ροπές στα άκρα των δύο δοκών θα είναι:

<u>Δοκός *ΒΓ*:</u>

$$M_{ΓB} = \frac{3EI}{L_2}\phi + \frac{M_{BA}}{2} - \frac{q_2 \cdot L_2^2}{8} \overset{\text{εξ.}(1)}{\Rightarrow} M_{ΓB} = \frac{3EI}{L_2}\phi + \frac{q_1 \cdot L_1^2}{4} - \frac{q_2 \cdot L_2^2}{8} \tag{3}$$

<u>Δοκός *ΓΔ*:</u>

$$M_{ΓΔ} = \frac{3EI}{L_3}\phi - \frac{M_{ΔE}}{2} + \frac{q_3 \cdot L_3^2}{8} \overset{\text{εξ.}(2)}{\Rightarrow} M_{ΓΔ} = \frac{3EI}{L_3}\phi - \frac{q_4 \cdot L_4^2}{4} + \frac{q_3 \cdot L_3^2}{8} \tag{4}$$

<u>Ισορροπία κόμβου *Γ*:</u>

$$\Sigma M_{\Gamma}=0 \;\Rightarrow\; M_{\Gamma B}+M_{\Gamma\Delta}=0$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{3EI}{L_2}\phi+\frac{q_1\cdot L_1^2}{4}-\frac{q_2\cdot L_2^2}{8}\right)+\left(\frac{3EI}{L_3}\phi-\frac{q_4\cdot L_4^2}{4}+\frac{q_3\cdot L_3^2}{8}\right)=0$$

$$\Rightarrow\; \left(\frac{3}{L_2}+\frac{3}{L_3}\right)EI\phi=-\frac{q_1\cdot L_1^2}{4}+\frac{q_2\cdot L_2^2}{8}-\frac{q_3\cdot L_3^2}{8}+\frac{q_4\cdot L_4^2}{4}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{EI\phi=\frac{-2q_1L_1^2+q_2L_2^2-q_3L_3^2+2q_4L_4^2}{24\left(\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}\right)}}$$

Αντικατάσταση στις εξισώσεις (3) και (4) δίνει:

$$M_{\Gamma B}=-M_{\Gamma\Delta}=\frac{-2q_1L_1^2+q_2L_2^2-q_3L_3^2+2q_4L_4^2}{8L_2\left(\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}\right)}+\frac{q_1L_1^2}{4}-\frac{q_2L_2^2}{8}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{M_{\Gamma B}=-M_{\Gamma\Delta}=\frac{\dfrac{L_2}{L_3}\left(2q_1L_1^2-q_2L_2^2\right)-q_3L_3^2+2q_4L_4^2}{8\left(1+\dfrac{L_2}{L_3}\right)}}$$

Από την ισορροπία της δοκού *ΒΓ* προκύπτει:

$$\Sigma M_{\Gamma}=0 \;\Rightarrow\; BL_2-Q_{BA}L_2-M_{BA}-\frac{q_2L_2^2}{2}-M_{\Gamma B}=0$$

$$\Rightarrow\; \boxed{B=q_1L_1\left(1+\frac{L_1}{2L_2}\right)+\frac{q_2L_2}{2}+\frac{M_{\Gamma B}}{L_2}}$$

$$\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; B-Q_{BA}-q_2L_2+Q_{\Gamma B}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{Q_{\Gamma B}=-B+q_1L_1+q_2L_2}$$

Από την ισορροπία της δοκού *ΓΔ* προκύπτει:

$$\Sigma M_{\Gamma}=0 \;\Rightarrow\; -M_{\Gamma\Delta}+\frac{q_3L_3^2}{2}+M_{\Delta E}+Q_{\Delta E}L_3-\Delta L_3=0$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\Delta=q_4L_4\left(1+\frac{L_4}{2L_3}\right)+\frac{q_3L_3}{2}+\frac{M_{\Gamma B}}{L_3}}$$

$$\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; Q_{\Gamma\Delta}+\Delta-q_3L_3-Q_{\Delta E}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{Q_{\Gamma\Delta}=-\Delta+q_3L_3+q_4L_4}$$

Από την ισορροπία του κόμβου *Γ* προκύπτει:

$$\Sigma F_y=0 \;\Rightarrow\; -Q_{\Gamma B}+\Gamma-Q_{\Gamma\Delta}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\Gamma=Q_{\Gamma B}+Q_{\Gamma\Delta}}$$